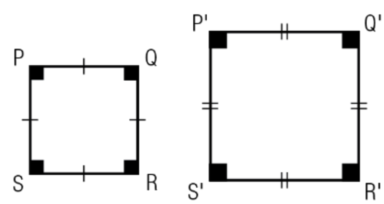
Chapitre 7

Rappel Les éléments homologues

7.1 Les figures semblables et le rapport de similitude

7.2 L'homothétie

7.3 Le rapport de similitude périmètre et aire



Notes de cours

Mathématiques 2e secondaire

Mai 2018

Étape 3

Nom : ____

Groupe :______________

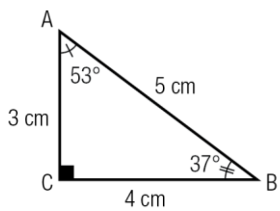
<u>Rappels</u>

Les éléments homologues

Un **côté homologue** est un côté d'une figure qui correspond à un côté d'une autre figure.

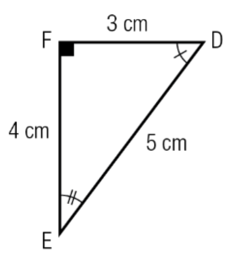
Un **angle homologue** est un angle d'une figure qui correspond à un angle d'une autre figure.

Les triangles ABC et DEF sont isométriques.



Les côtés homologues sont :

$\overline{AB}$ et $\overline{DE}$;
$\overline{AC}$ et $\overline{DF}$;
BC et EF.



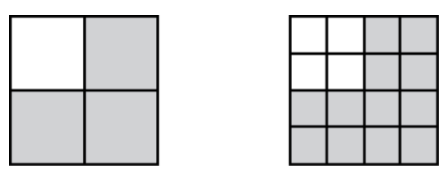
Les angles homologues sont :

$\angle A$ et $\angle D$;
$\angle B$ et $\angle E$;
$\angle C$ et $\angle F$.

Les fractions équivalentes

Deux fractions sont dites équivalentes si elles représentent la même quantité.

Exemple : Voici deux carrés isométriques.



$$\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$$

Les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{12}{16}$ sont équivalentes, car les parties en gris représentent la même part du carré.

Pour vérifier si deux fractions sont équivalentes, on peut les réduire à leur plus simple expression. Si les fractions représentent le même nombre, elles sont équivalentes.

Exemple : On veut vérifier si les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{10}{15}$ sont équivalentes.

Si on réduit la fraction $\frac{10}{15}$ à sa plus simple expression, on obtient $\frac{2}{3}$. En effet : $\frac{10}{15} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{2}{3}$.

Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{10}{15}$ sont donc équivalentes.

<u>Les figures semblables et le rapport de similitude</u>

Deux figures géométriques sont ________________ lorsque l’une est un agrandissement, une réduction ou une reproduction exacte de l’autre.

Des figures semblables sont des figures dans lesquelles :

1. les ______________________________ sont isométriques ;
2. les mesures des __________________________________ sont proportionnelles.

Pour indiquer que deux figures sont semblables, on utilise le symbole ______.

Exemple :

Le triangle ABC est semblable au triangle A'B'C'.

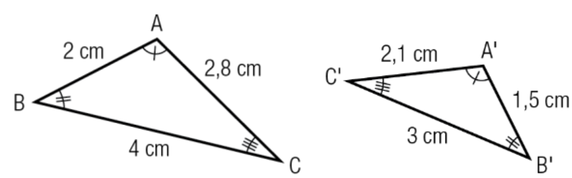
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, car :

$$\frac{m\ \overline{A'B'}}{m\ \overline{AB}} = \frac{m\ \overline{B'C'}}{m\ \overline{BC}} = \frac{m\ \overline{A'C'}}{m\ \overline{AC}}$$

$\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$

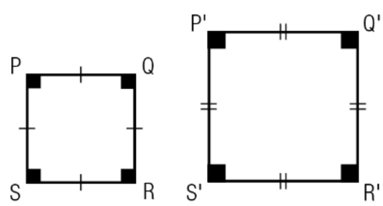
$\angle C \cong \angle C'$



Tous les **cercles** sont semblables entre eux et tous les **polygones réguliers** ayant un même nombre de côtés sont semblables entre eux.

Exemple :

Les carrés PQRS et P'Q'R'S' sont semblables.



Un **rapport de similitude** est un rapport des mesures des ________________________ de deux figures semblables. Le rapport de similitude, k, est :

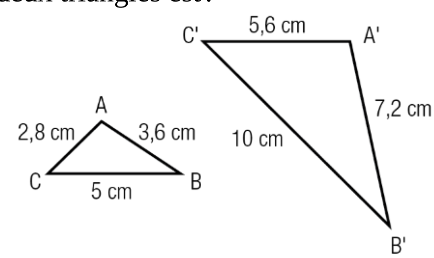
$k =$ ____

Lorsque le rapport de similitude est :

- compris entre 0 et 1, la figure image est une ____________________ de la figure initiale;
- égal à 1, la figure image et la figure initiale sont ______________________: l'une est la reproduction exacte de l'autre ;
- supérieur à 1, la figure image est un ______________________ de la figure initiale.

Exemple :

Le triangle ABC et le triangle A'B'C' sont semblables.
Le rapport de similitude, *k*, entre les deux triangles est :



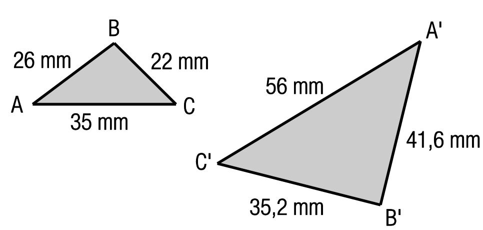
$$k = \frac{m\ \overline{A'B'}}{m\ \overline{AB}} = \frac{m\ \overline{A'C'}}{m\ \overline{AC}} = \frac{m\ \overline{B'C'}}{m\ \overline{BC}}$$

$$k = \frac{7{,}2}{3{,}6} = \frac{5{,}6}{2{,}8} = \frac{10}{5} = 2$$

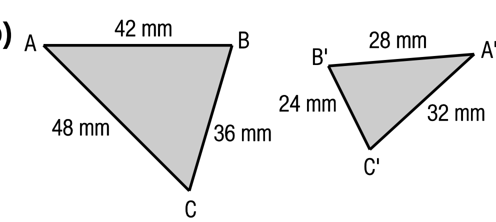
Le triangle A'B'C' est donc un agrandissement du triangle ABC, car $k = 2$, donc $k > 1$.

Sachant que chaque paire de figures suivantes est semblable, détermine leur rapport de similitude, k

a)

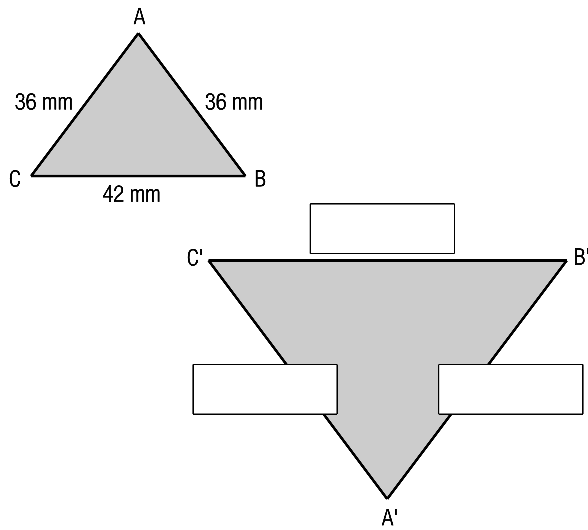


b)



Sachant que ∆ ABC ~ ∆ A'B'C', détermine et place les mesures sur la figure image à partir du rapport de similitude, k.

$k = \frac{11}{6}$



Pour chaque rapport de similitude, indique s'il s'agit d'un agrandissement, d'une réduction ou d'une reproduction exacte.

c) $k = 5$

d) $k = \frac{3}{4}$

e) $k = 6{,}2$

f) $k = \frac{9}{11}$

g) $k = 0{,}05$

h) $k = 1{,}03$

i) $k = 0{,}89$

j) $k = \frac{5}{5}$

k) $k = 1$

l) $k = \frac{7}{2}$

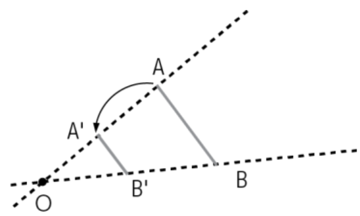
L'homothétie

Une homothétie est une transformation géométrique par laquelle on associe à une figure initiale une figure image qui lui est semblable à partir d'un point fixe, O, nommé ____________________________ **,** et d'un rapport, *k*, nommé ____________ ________________________.

Le rapport d'homothétie, *k*, se calcule ainsi :

$$k = \frac{\text{distance du centre d'homothétie O au point image A'}}{\text{distance du centre d'homothétie O au point initial A}} = \frac{m\ \overline{OA'}}{m\ \overline{OA}}\ .$$

Le rapport d'homothétie, *k*, est ________________ si la figure image et la figure initiale sont situées du même côté du centre d'homothétie.



(Il est __________________ si la figure image et la figure initiale sont situées de part et d'autre du centre d'homothétie.)

Dans une homothétie :

- l'image d'un point est située sur la droite passant par ce point et le centre d'homothétie O ;
- la figure image est un agrandissement de la figure initiale si $k > 1$;
- la figure image est une réduction si k est entre 0 et 1 ($0 < k < 1$);
- la figure image et la figure initiale sont isométriques (l'une est la reproduction exacte de l'autre) si $k = 1$.

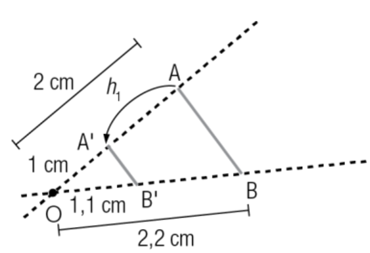
Pour un rapport d'homothétie positif, le rapport d'homothétie et le rapport de similitude sont _____________.

Exemples :

Le segment A'B' est l'image du segment AB par une homothétie h_1 de centre O et de rapport 0,5.

$$\frac{m\ \overline{OA'}}{m\ \overline{OA}} = \frac{1\,\text{cm}}{2\,\text{cm}} = 0{,}5$$

$$\frac{m\ \overline{OB'}}{m\ \overline{OB}} = \frac{1{,}1\,\text{cm}}{2{,}2\,\text{cm}} = 0{,}5$$

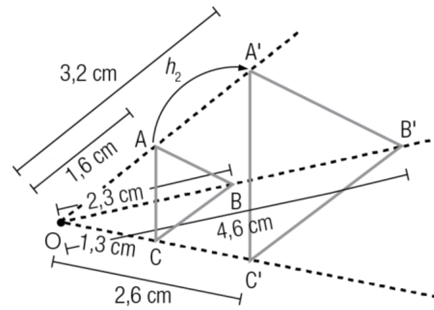


2) Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par une homothétie h_2 de centre O et de rapport 2.

$$\frac{m\ \overline{OA'}}{m\ \overline{OA}} = \frac{3{,}2\text{ cm}}{1{,}6\text{ cm}} = 2$$

$$\frac{m\ \overline{OB'}}{m\ \overline{OB}} = \frac{4{,}6\text{ cm}}{2{,}3\text{ cm}} = 2$$

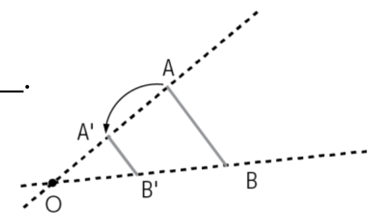
$$\frac{m\ \overline{OC'}}{m\ \overline{OC}} = \frac{2{,}6\text{ cm}}{1{,}3\text{ cm}} = 2$$



Les propriétés de l'homothétie

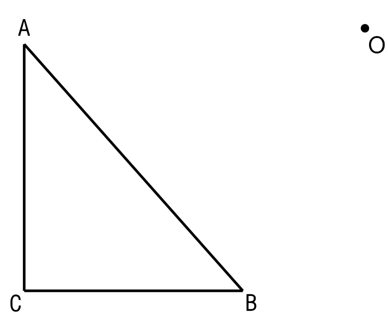
1. La figure image et la figure initiale sont ____________________.

2. Les côtés homologues de la figure image et de la figure initiale sont ___________________.

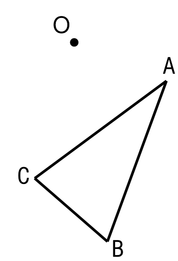


Dans chaque cas, trace l'image de la figure par une homothétie de centre O selon le rapport donné.

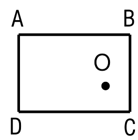
a) $k = \frac{1}{4}$



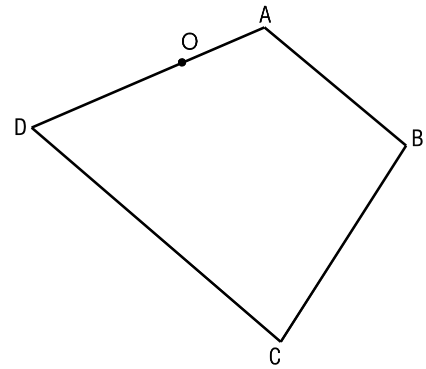
b) $k = \frac{3}{2}$



c) $k = 2{,}25$



d) $k = 0{,}6$



Pour chacune des situations, détermine le rapport d'homothétie, *k,* de centre O.

a) m $\overline{OA} = 16$ cm, m $\overline{OA'} = 8$ cm

b) m $\overline{OB} = 6$ cm, m $\overline{OB'} = 18$ cm

c) m $\overline{OC} = 63$ mm, m $\overline{OC'} = 49$

d) m $\overline{OD} = 34$ mm, m $\overline{OD'} = 51$

Le rapport de similitude périmètre et aire

Rappel : Le **rapport de similitude** est le rapport des mesures des côtés homologues de deux figures semblables. Le rapport de similitude, k, est :

$$k = \frac{\text{mesure d'un côté de la figure image}}{\text{mesure du côté homologue de la figure initiale}}.$$

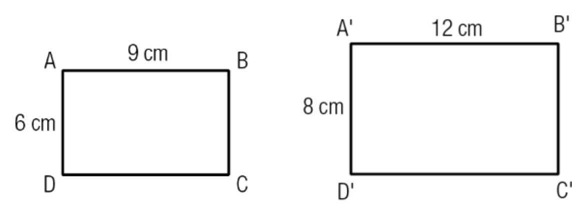
Pour des figures planes semblables :

1. le rapport des ____________________ est égal au rapport de similitude, k ;
2. le rapport des ______________ est égal au __________ du rapport de similitude, soit k^2.

Exemples :

1) Le rectangle ABCD est semblable au rectangle A'B'C'D'.

$$k = \frac{m\,\overline{A'B'}}{m\,\overline{AB}} = \frac{12\text{ cm}}{9\text{ cm}} = \frac{4}{3}$$



Calcul du rapport des périmètres :

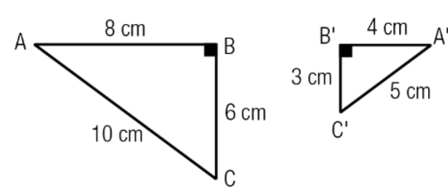
$$\frac{\text{périmètre A'B'C'D'}}{\text{périmètre ABCD}} = \frac{40\text{ cm}}{30\text{ cm}} = \frac{4}{3} = k$$

Calcul du rapport des aires :

$$\frac{\text{aire A'B'C'D'}}{\text{aire ABCD}} = \frac{96\text{ cm}^2}{54\text{ cm}^2} = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = k^2$$

2) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$k = \frac{m\,\overline{A'B'}}{m\,\overline{AB}} = \frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}} = \frac{1}{2}$$



Calcul du rapport des périmètres :

$$\frac{\text{périmètre A'B'C'}}{\text{périmètre ABC}} = \frac{12\text{ cm}}{24\text{ cm}} = \frac{1}{2} = k$$

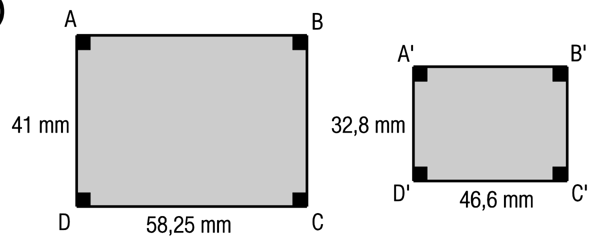
Calcul du rapport des aires :

$$\frac{\text{aire A'B'C'}}{\text{aire ABC}} = \frac{6\text{ cm}^2}{24\text{ cm}^2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = k^2$$

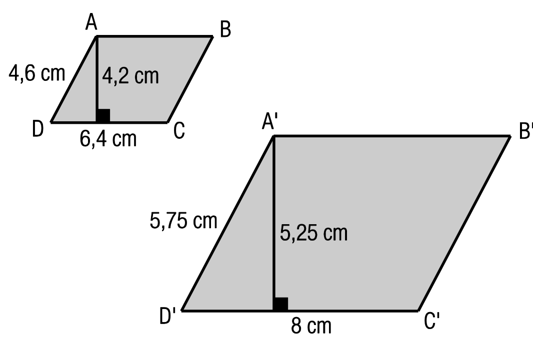
Dans chaque cas, sachant que les paires de figures sont semblables, détermine :

1) le rapport de similitude, k ;
2) le rapport des périmètres ;
3) le rapport des aires.

a)



b)

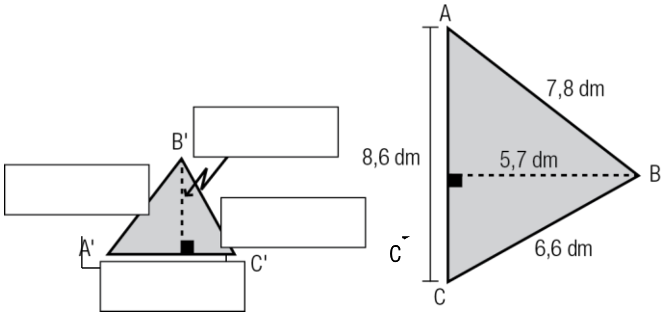


Remplis le tableau ci-dessous.

Rapport de similitude	4				0,7		3,6		
Rapport des périmètres			0,03			$\frac{3}{5}$			6,4
Rapport des aires		$\frac{1}{36}$		2,89				7,84	

Dans chaque cas, sachant que les paires de figures sont semblables, détermine les mesures manquantes à partir de l'information donnée.

Le périmètre du petit triangle est de 8,05 dm.



L'aire du parallélogramme ABCD est de 416,64 dm^2.